تمرین‌های مهم کتاب درسی را که حدس میزنم، برای طرح تست مناسب باشند، یا مستقیما بصورت مثال حل شده‌اندو یا بصورت تست مطرح شده‌اند. از کنکور سراسری سنوات گذشته نیز به وفور استفاده کرده‌ام، چراکه به نظر بنده، بهترین مرجع یادگیری و درک عمیق مطالب همین سوالات کنکور سنوات گذشته است. در پایان هر فصل هم تعداد متناسبی تست برای خودآزمایی قرار داشته است. همچنین در لابلای متن و شرح درس تمرینات مختلفی گنجانده شده است که اغلب تشابه زیادی با مثالهای حل شده‌ی قبل یا بعد از خود دارد. پاسخ تشریحی این تست‌ها و تمرینات را در آخرین فصل کتاب می توانید ببینید. این مجموعه را تماما خودم و با لاتک تایپ کرده‌ام. زمان زیادی را صرف این کار کرده‌ام. لاتک دارای برتری فریبنده و بی‌نظیری نسبت به تمام حروف‌چین‌های موجود است. زیبایی نوشتن حروف و علائم را می توانید در سراسر کتاب ببینید. استفاده از این کتاب را به دانش‌آموزان علاقمند توصیه میکنم.

**فرهاد صمدی**

**تابستان ۹۶**

**شیراز**

# توضیح نه چندان کوتاه

با سلام خدمت همکاران و دانش‌آموزان عزیز. در سالی که گذشت، بنده جزوه‌ای در ریاضی (۱) سال دهم نوشتم. هدفم بیشتر آشنایی و تسلط بر لاتک بود و در عین حال به محتوای مطالب هم با سلیقه ی خاص خود(که ممکن است عامه پسند نباشد) تکیه داشتم. بنده نصف بیشتر سابقه‌ی خود را در مدارس خاص طی کرده‌ام و ازاین بابت، بسیار خرسندم. چرا که از قبل محصلین مستعد و سخت‌کوش و همکاران با تجربه بهره‌های فراوان بردم. آن جزوه بصورت رایگان در اختیار همگان قرار گرفت و در طول سال همکاران و محصلین عزیز با ابراز محبت از طریق ایمیل‌های خود، بنده را شرمنده می‌کردند. البته تعدادی فرصت طلب هم از این جزوه استفاده ناصواب کردند. آن عده‌ی قلیل،در مقابل سیل انبوه همکاران و محصلین درستکار تقریبا صفرند. سخن را کوتاه کنم. جزوه‌ی حاضر فصل اول ریاضی (۲) سال یازدهم تجربی است که فصل اول آن بصورت رایگان و با پس‌زمینه (نام آزاردهنده‌ی بنده) در اختیار همگان است. به جای ایمیل در بالای صفحه شماره‌ی شخصی خود را قرار دادم تا ارتباط راحت‌تر باشد. تمام مثال‌ها و تمرین‌ها دارای جواب هستند. البته مثال‌ها در خود متن دارای حل هستند و تمرین‌ها در آخرین فصل کتاب، حل شده‌اند. این جزوه هنوز تکمیل نشده است و تا ۲۰ شهریور اگر خدا یاری کند به پایان می‌رسد. متاسفانه از قرار دادن آن بصورت $Pdf$ در فضای مجازی معذورم. با اینحال هر کس مایل باشد، چه محصل و چه همکاران عزیز، می‌توانم نسخه‌ای پرینت شده و صحافی شده را خدمتشان ارسال کنم. در همین جا اعلام میکنم بنده یک دبیر ریاضی هستم و قبل از دبیر ریاضی بودن یک انسان و هر انسانی ممکن است خطاکار باشد. با اینکه چندبار جزوه را بررسی کرده‌ام ، اما شما بهتر از من می دانید که یافتن اشتباهات خود، آن‌هم زمانی که فکر می کنید فلان چیز قاعدتا باید درست باشد، چقدر کار مشکلی است. بر بنده منت خواهید گذاشت، چنانچه این اشتباهات را از طریق یک پیام کوتاه با شماره بنده در میان بگذارید. نهایتا با ابراز شرمندگی تمام، این جزوه رایگان نیست، اما هزینه چندانی هم نخواهد داشت.

**فرهاد صمدی**

**تابستان ۹۶**

**شیراز**

# فصل ۱

# هندسه‌ی تحلیلی و جبر

در این فصل ابتدا هندسه‌ی تحلیلی در صفحه را معرفی و بررسی می کنیم. هندسه تحلیلی را رنه دکارت [۱] فرانسوی بنیان نهاد. وی اشکال هندسی مهم را به دستگاه مختصات آورد و به رئوس آنها مختصات (یعنی طول و عرض) نظیر نمود. هر خط را با یک معادله‌ی یکتا بیان نمود و فاصله‌ی بین نقاط را تعریف کرد. در بخش اول برخی مسائل مربوط

[۱] رنه دکارت، فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بزرگ عصر رنسانس در روز ۳۱ مارس ۱۵۹۶ میلادی در روستایی از توابع شهرستان اندر-ا-لوآر فرانسه زاده شد. مادرش در سیزده‌ماهگی وی درگذشت و پدرش قاضی و مستشار پارلمان انگلستان بود. دکارت در سال ۱۶۰۶ میلادی، هنگامی که پسر ده‌ساله‌ای بود، وارد مدرسهٔ لافلش شد. این مدرسه را فرقهٔ یسوعیان تأسیس کرده بودند و در آن علوم جدید را همراه با تعالیم مسیحیت تدریس می‌کردند. دکارت طی هشت سال تحصیل در این مدرسه، ادبیات، منطق، اخلاق، ریاضیات و مابعدالطبیعه را فرا گرفت. در سال ۱۶۱۱ میلادی، دکارت در یک جلسه سخنرانی تحت عنوان اکتشاف چند سیارهٔ سرگردان در اطراف مشتری، از اکتشافات گالیله اطلاع حاصل کرد. این سخنرانی در روح او تأثیر فراوان گذاشت. پس از اتمام دوره و خروج از لافلش، مدتی به تحصیل علم حقوق و پزشکی مشغول گردید، اما در نهایت تصمیم گرفت به جهانگردی بپردازد و آن‌گونه دانشی را که برای زندگی سودمند باشد فراگیرد. به همین منظور، مدتی به عنوان سرباز بدون مزد به خدمت ارتش هلند درآمد، چراکه فرماندهی آن را شاهزاده‌ای به نام موریس بر عهده داشت که در فنون جنگ و نیز فلسفه و علوم مهارتی به‌سزا داشت و بسیاری از اشراف فرانسه دوست داشتند تحت فرمان او فنون رزمی را فرابگیرند. دکارت در مدتی که در قشون ارتش هلند بود به علم موردعلاقهٔ خود، یعنی ریاضیات می‌پرداخت. در بهار سال ۱۶۱۹ میلادی از هلند به دانمارک و آلمان رفت و به خدمت سرداری به نام ماکسیمیلیان درآمد؛ اما زمستان فرا رسید و در دهکده نوبیرگ در حوالی رود دانوب، بی دغدغه خاطر و با فراغت تمام به تحقیق در ریاضیات پرداخت و براهین تازه‌ای کشف کرد که بسیار مهم و بدیع بود و در پیشرفت ریاضیات تأثیر به سزایی گذاشت. پس از مدتی، دکارت به فکر یکی‌ساختن همه علوم افتاد. در شب دهم نوامبر ۱۶۱۹ وی سه رؤیای امیدبخش دید و آن‌ها را چنین تعبیر کرد که «روح حقیقت او را برگزیده و از او خواسته تا همه دانش‌ها را به صورت علم واحدی درآورد». این رؤیاها به‌قدری او را مشعوف ساخت که نذر کرد تا مقبرهٔ حضرت مریم را در ایتالیا زیارت نماید. وی چهار سال بعد به نذر خود وفا کرد. از ۱۶۱۹ به بعد، چندسالی در اروپا به سیاحت پرداخت و چندسالی هم در پاریس اقامت کرد؛ اما زندگی در آنجا را که مزاحم فراغت خاطر خود می‌دید، نپسندید و در سال ۱۶۲۸ میلادی بار دیگر به هلند بازگشت و در آن دیار تا سال ۱۶۴۹ میلادی مجرد، تنها و دور از هرگونه غوغای سیاسی و اجتماعی، تمام اوقات خود را صرف پژوهش‌های علمی و فلسفی نمود. تحقیقات وی بیشتر تجربه و تفکر شخصی بود و کمتر از کتاب استفاده می‌کرد. در سپتامبر ۱۶۴۹ به دعوت کریستین- ملکه سوئد- برای تعلیم فلسفه به دربار وی در استکهلم رفت؛ اما زمستان سرد این کشور اسکاندیناوی از یک‌سو و ضرورت سحرخیزی در ساعت پنج بامداد برای تعلیم ملکه از سوی دیگر، دکارت را که به این نوع آب‌وهوا و سحرخیزی عادت نداشت، به بیماری ذات‌الریه مبتلا ساخت و در پنجاه و سه سالگی از پا درآورد. دکارت از دانشمندان و فیلسوفان بزرگ تاریخ به‌حساب می‌آید. او قانون شکست نور را در علم فیزیک کشف کرد و هندسهٔ تحلیلی را در ریاضیات و هندسه بنا نهاد.

به خط را بررسی می‌کنیم. در بخش دوم معادله‌ی درجه دوم و سهمی‌ها بررسی می‌شوند. در بخش سوم معادلات شامل عبارات گویا و گنگ و روش‌های حل آنها به تفصیل بیان خواهد شد..

## ۱.۱ هندسه تحلیلی

در طیف گسترده‌ای از پدیده‌های جهان، رابطه خطی بین متغیرها به چشم میخورد. بنابراین مطالعه تابعهای خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا میکند. از کلاس دهم و سنوات گذشته با معادله خط آشنا شده‌اید. یک خط با داشتن دو نقطه‌اش بصورت منحصربفردی مشخص می‌شود. برای نوشتن معادله‌ی یک خط گذرا بر دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱), B(x_۲, y_۲)$ ابتدا شیب خط را باید محاسبه کرد و این شیب از دستور $\frac{\text{تغییرات عرض}}{\text{تغییرات طول}} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = m$ حاصل می‌شود. با داشتن شیب، معادله خط بصورت

$$\boxed{y - y_۱ = m(x - x_۱) \Longleftrightarrow y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)}$$

بدست می‌آید. اگر معادله‌ی خط را ساده کنیم نهایتا بفرم کلی $ax + by + c = ۰$ است. اما این خط را می توان بصورت نجیب‌تری هم نوشت. بدین ترتیب که:

$$by = -ax - c \Longrightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \Longrightarrow \boxed{y = mx + h}$$

دراین حالت اخیر مقدار $m = \frac{-a}{b}$ یعنی ضریب $x$ همان شیب خط است و مقدار $h = \frac{-c}{b}$ درواقع عرض از مبدا خط است.(عرض از مبدا معرف فاصله محل برخورد خط با محور عرضها تا مبدا مختصات است). همچنین از مثلثات ریاضی ۱ می‌دانیم که $m = \tan\alpha$ که در آن $\alpha$ زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور $x$ ها می‌سازد. برای روشن شدن مطالب فوق چند سوال را با هم مرور می‌کنیم.

**مثال ۱.۱.** معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(-۱, ۲), (۳, -۲)$ را بنویسید و شیب و عرض از مبدا آن‌را بیابید.

حل: با توجه به دستور داریم:

$$y - ۲ = \frac{-۲ - ۲}{۳ - (-۱)}(x - (-۱)) \Longrightarrow y - ۲ = -x - ۱ \Longrightarrow y = -x + ۱$$

پس شیب $-۱$ و عرض از مبدا یک است.

**مثال ۲.۱.** خطی از دو نقطه‌ی $(۰, ۵), (k, ۰)$ می‌گذرد و شیب آن ۴ است. مقدار $k$ را بیابید.

حل: با نوشتن دستور شیب داریم: $m = ۴ = \frac{۵ - ۰}{۰ - k}$ و از اینجا داریم $k = -۱/۲۵$ .

**پرسش ۱.۱.** به ازای کدام مقدار $m$ خط $y = mx + m - ۳$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟(مشابه سراسری انسانی ۹۴)

۱) $۰ \leq m \leq ۳$ ۲) $m \geq ۳$ ۳) $m \leq ۰$ ۴) $\varnothing$

حل: باید شیب مثبت و عرض از مبدا منفی باشد یعنی:

$$\begin{cases} m \geq ۰ \\ m - ۳ \leq ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۰ \leq m \leq ۳$$

**پرسش ۲.۱.** شیب خطی که نقطه‌ی $(-۳, ۵)$ را به‌محل تلاقی دو خط به معادلات $x = y + ۸$ و $۵x + ۲y + ۹ = ۰$ وصل کند، کدامست؟

۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) $۲$ ۴) $۳$

حل: ابتدا دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} x - y = ۸ \\ ۵x + ۲y = -۹ \end{cases}$ را برای یافتن محل تقاطع دو خط مذکور حل کرده و داریم $x = ۱, y = -۷$ و شیب معادله‌ی گذرنده از دو نقطه $(-۳, ۵), (۱, -۷)$ برابر است با $-۳$ .

**پرسش ۳.۱.** به ازای کدام مقدار $a$ نقاط $(۰, ۰), (a, ۳), (۶, ۴a + ۱)$ روی یک خط راست قرار دارند؟ (خارج تجربی ۸۸)

۱) $-۲, \frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲, \frac{۳}{۴}$ ۳) $۲, -\frac{۳}{۴}$ ۴) $۲, -\frac{۹}{۴}$

حل: شیب دو بدو نقاط باید برابر باشد. با محاسبه این شیب‌ها داریم $m_۱ = \frac{۳}{a}$ , $m_۲ = \frac{۴a + ۱}{۶}$ از تساوی این دو داریم $a = ۲, -\frac{۹}{۴}$ . **دراین حالت گویند که ۳ نقطه هم‌خطند یا بر یک استقامت هستند.**

**پرسش ۴.۱.** خطی با شیب $m$ از نقطه‌ی $(۱, ۲)$ گذشته و محورهای مختصات را در نقاط $A, B$ قطع کرده است. به ازای کدام مقدار $m$ مساحت مثلث $OAB$ برابر ۴ واحد مربع است؟ (کنکور نظام قدیم)

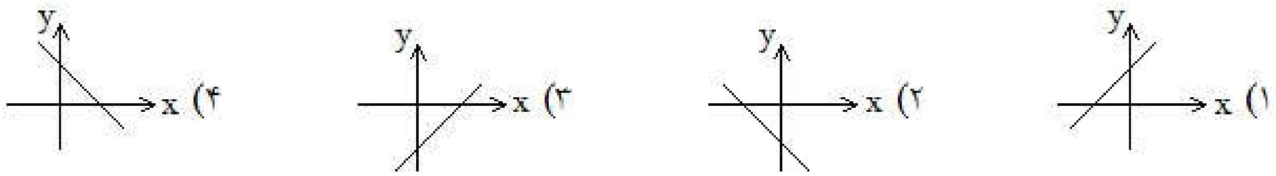
۱) $۳$ ۲) $۲$ ۳) $-۲$ ۴) $-۳$

حل: با داشتن شیب و یک نقطه معادله‌ی خط بصورت $y - ۲ = m(x - ۱)$ است[۲]. حال محل تقاطع را با محورها بدست آورده داریم: $Oy = ۲ - m, Ox = \frac{m - ۲}{m}$ و لذا مساحت مثلث مفروض برابر است با $S_{OAB} = \frac{۱}{۲} \times (۲ - m)(\frac{m - ۲}{m}) = ۴$ و از حل این معادله داریم $m = -۲$ .

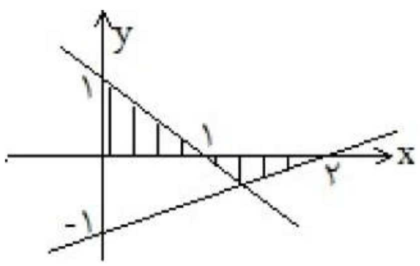
[۲] این معادله معرف یک خط نیست و در واقع با تغییر $m$ خطهای بی‌شماری حاصل می‌شود. چنین معادله‌ای را اغلب **دسته خط** می‌نامند. مثلا قطرهای یک دایره یک دسته خط هستند.البته همه‌ی دسته خطوط لزوما از یک نقطه نمی‌گذرند. ممکن است خطوط یک دسته خط همگی موازی باشند. آیا می‌توانید مثالی بزنید؟

**تمرین ۱.۱.** عرض از مبدا خط گذرنده از نقاط $(-۴,۱)$, $(۲,۵)$ را بیابید.(انسانی ۸۸)

**تمرین ۲.۱.** اگر در معادله‌ی $cy - ax = -b$ داشته باشیم $\frac{a}{c} < ۰, \frac{b}{c} > ۰$ دراینصورت شکل تقریبی این خط به کدام صورت است؟(نشان برتر تهران)




**مثال ۳.۱.** با توجه به شکل مساحت ناحیه‌ی هاشورزده را بیابید.(کنکور قدیم)




حل: معادله خطی که محور $x$ ها را در نقطه‌ای به‌طول $a$ و محور $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض $b$ قطع کند بصورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$ است. پس معادله‌ی این دو خط بصورت $x + y = ۱, \frac{x}{۲} - y = ۱$ است. محل تقاطع این دو خط با حل دستگاه نظیرشان نقطه‌ی $\left(\frac{۴}{۳}, -\frac{۱}{۳}\right)$ است. پس مجموع مساحت‌ها برابر است با $\frac{۲}{۳}$.

**سوال:** خطوط $x = a \,,\, y = b$ چگونه خطوطی هستند؟ در مورد شیب آن‌ها چه می‌توان گفت؟

پاسخ : این خطوط را خطوط خاص می نامیم. خط $x = a$ خطی موازی محور عرض‌هاست و شیب چنین خطوطی تعریف نشده است. (چرا) خط $y = a$ خطی موازی محور طول‌هاست و شیب چنین خطوطی صفر است.

**تذکرمهم:** دو خط $\begin{cases} ax + by + c = ۰ \\ a'x + b'y + c' = ۰ \end{cases}$ مفروضند. برخی نتایج زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

۱. دو خط منطبقند هرگاه : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

۲. دو خط در یک نقطه متقاطعند هرگاه : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

۳. دو خط موازیند هرگاه شیب‌های برابر داشته باشند و یا معادلا : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

۴. دو خط موازی $ax + by + c = ۰ \,,\, ax + by + c' = ۰$ مفروضند. معادله‌ی خطی که مابین این دو خط و موازی هردو و به یک فاصله از هر دو است برابر است با $ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰$.

۵. دو خط(غیرموازی با محورها) متعامد(عمودبرهم) هستند هرگاه حاصلضرب شیب‌هایشان برابر $-۱$ شود.

۶. اگر زاویه‌ی بین دو خط که دارای شیب‌های $m_۱, m_۲$ می‌باشند، برابر است $\alpha$ باشد، آنگاه مقدار این زاویه برابر

است با : $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ \times m_۲}\right|$ .

**پرسش ۵.۱.** خط گذرا بر نقطه‌ی $(۳, -۱)$ و عمود بر خط $۲y - ۳x = ۴$ محور $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۰    ۲) ۱    ۳) ۲    ۴) $-۲$

حل: شیب خط داده شده برابر $\frac{۳}{۲}$ است و لذا شیب خط خواسته شده باید $-\frac{۲}{۳}$ باشد. پس معادله‌ی خط بصورت $y + ۱ = -\frac{۲}{۳}(x - ۳)$ خواهد بود.

**تمرین ۳.۱.** در $۲y + (a+۱)x = ۱$ نسبت تغییرات عرض به تغییرات طول برابر ۲ است. مقدار $a$ را بیابید.

**پرسش ۶.۱.** دو خط $۲x - y = ۱\ ,\ (k-۱)x + ۲y = x - ۲$ موازیند. مقدار $k$ کدامست؟

۱) $-۱$    ۲) ۱    ۳) ۲    ۴) $-۲$

حل: باید شیب‌ها برابر باشندویا $\frac{۲}{-۱} = \frac{k-۱}{۲}$ پس داریم $k = -۲$ .

**پرسش ۷.۱.** در دسته خطوط $y = mx$ که همگی از مبدا می‌گذرند، چند خط با شیب صحیح وجود دارد که زاویه‌ی بین آن‌ها ۴۵ درجه باشد؟

۱) ۱    ۲) ۲    ۳) ۳    ۴) ۴

حل: فرض کنید که دو خط $y = mx\ ,\ y = m'x$ چنین باشند. پس با توجه به ویژگی شماره ۶ تذکر بالا باید داشته باشیم $\left|\dfrac{m - m'}{۱ + mm'}\right| = ۱ = \tan ۴۵^\circ$ و لذا $۱ + mm' = m - m'$ و یا $۱ + mm' = m' - m$ . بنابراین داریم $m' - m - mm' = ۱$ ویا $m - m' - mm' = ۱$ . با تجزیه‌ی هر دو عبارت و با توجه به این نکته که $m, m' \in \mathbb{Z}$ هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} (m'+۱)(۱-m) = ۲ \\ (m+۱)(۱-m') = ۲ \end{cases} \Longrightarrow (m, m') = (۰, -۱), (۱, ۰), (-۲, ۳), (-۳, ۲)$$

**پرسش ۸.۱.** دایره‌ای بر دو خط $۲x - ۳y - ۲ = ۰$ و $۳y - ۲x - ۶ = ۰$ مماس است. کدام گزینه می‌تواند مرکز دایره باشد؟

۱) $(۰, -۱)$    ۲) $(۱, ۲)$    ۳) $(۲, ۱)$    ۴) $(-۱, ۰)$

حل: با توجه بند ۴ تذکر بالا، چون این دو خط موازیند، پس مرکز دایره بر خطی مابین این‌دو و به فاصله یکسان و موازی هردو خط قرار دارد و معادله‌ی آن بصورت $۲x - ۳y + ۲ = ۰$ است. گزینه‌ی ۴ در این خط صادق است.

**پرسش ۹.۱.** اگر دو خط $y=(m^2-4)x+1$ و $y=(m^2+m-6)x+2$ با هم موازی باشند آنگاه با خط $y=x+1$ چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) $30^\circ$ ۲) $60^\circ$ ۳) $90^\circ$ ۴) $45^\circ$

حل: از توازی دو خط داریم $m^2+m-6=m^2-4$ وازاینجا $m=2$ . پس دو خط مورد نظر خطوط خاص $y=1, y=2$ هستند. حال زاویه‌ی بین خط $y-x-1=0$ , $y-1=0$ را طبق دستور محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{0-1}{1+0\times(-1)}\right|=1\Longrightarrow\alpha=45^\circ$$

**پرسش ۱۰.۱.** دو نقطه‌ی $A(2,3)$ , $B(4,7)$ و خط $y=x-1$ مفروضند. نقطه‌ی $M$ بر روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود، بطوریکه تفاضل فواصل آن از دو نقطه‌ی مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟(۹۳ خارج)

۱) $-1$ ۲) $0$ ۳) $1$ ۴) $3$

حل: این تست در واقع ریشه‌ی هندسی دارد. دو نقطه‌ی $B, A$ در صفحه مفروضند. اگر $M$ هر نقطه‌ی دلخواهی باشد، ثابت می‌شود که مجموع $|MA|+|MB|$ زمانی کمترین مقدار را دارد که نقطه‌ی $M$ روی پاره‌خط $AB$ و بین این‌دو باشد. و قدر مطلق تفاضل $M$ از این دو نقطه زمانی بیشترین مقدار است که $M$ بازهم روی پاره‌خط باشد و بین دو نقطه نباشد. با این اوصاف باید محل تقاطع خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A, B$ و خط $y=x-1$ را یافت. خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A, B$ بصورت $y=2x-1$ است و نقطه‌ی تقاطع آن با خط $y=x-1$ نقطه‌ای بطول صفر است و گزینه دو جواب است.

**پرسش ۱۱.۱.** خطی با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی $150^\circ$ می‌سازد و از نقاط $A(a,2)$ و $B(-1,3)$ می‌گذرد. مقدار $a$ کدامست؟(سنجش ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $2-\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}-2$

حل: شیب خط برابر است با

$$m=\tan 150^\circ=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$m=\frac{3-2}{-1-a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}-1$$

**تمرین ۴.۱.** اگر $A$ نقطه‌ای بطول ۲ روی خط $y=5$ و $B$ نقطه‌ای به عرض ۱ روی خط $x=-1$ باشد، شیب خط عمود منصف پاره‌خط $AB$ را بیابید.

**تمرین ۵.۱.** نقطه‌ی $A(a,c)$ محل برخورد دو خط $y=2x-3$ , $2y-bx=4$ است. اگر این دو خط متعامد باشند، مقادیر $c, b, a$ را بیابید.

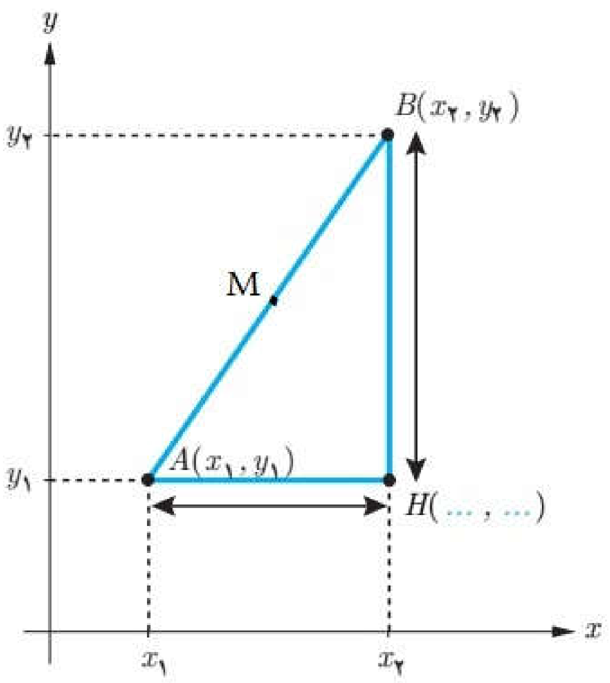
**تمرین ۶.۱.** دو خط $۲y + x = -۳$ , $y + ۲x = ۳$ متقاطعند. اگر بخواهیم خط $y = ۳x - a$ نیز از آن نقطه بگذرد، مقدار $a$ را بیابید.

**تمرین ۷.۱.** مقدار $m$ را چنان بیابید که خط $y = (m-۳)x + ۲ - m$ از ناحیه‌ی اول نگذرد.(۹۴ انسانی)

**تمرین ۸.۱.** معادله‌ی خط گذرا از $(۳, ۴)$ و عمود بر خط $۲y + x = ۳$ را بیابید.

## ۲.۱ فاصله دو نقطه و فاصله‌ی نقطه از خط

دو نقطه‌ی دلخواه $A(x_۱, y_۱), B(x_۲, y_۲)$ مفروضند. می‌خواهیم فاصله‌ی این دو نقطه را بیابیم. درحالت خاصی که دو نقطه هم‌عرض ویا هم‌طول باشند، کار ساده است. اگر هم‌عرض باشند، یعنی $y_۱ = y_۲$ باشد، آنگاه فاصله‌ی دو نقطه برابر است با $|AB| = |x_۲ - x_۱|$ و در حالتی که هم‌طول باشند، یعنی $x_۱ = x_۲$ آنگاه $|AB| = |y_۲ - y_۱|$ . درغیراینصورت روش کمی پیچیده‌تر است. اساس کار مبتنی بر حالات فوق و قضیه‌ی فیثاغورس است. در شکل زیر جزئیات روش محاسبه تشریح شده است. یک مثلث قائم‌الزاویه چنان می‌سازیم که وترش پاره‌خط $AB$ باشد. حال دو ضلع دیگر این مثلث با توجه به حالات خاص اشاره شده قابل محاسبه هستند.




در شکل مقابل دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱), B(x_۲, y_۲)$ مفروضند. می‌خواهیم فاصله این دو نقطه، یعنی طول پاره‌خط $AB$ را بیابیم. مختصات نقطه‌ی $H(x_۲, y_۱)$ است و داریم $|AH| = x_۲ - x_۱$ و $|BH| = y_۲ - y_۱$ و با بکارگیری قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث مقابل داریم : $|AB|^۲ = |AH|^۲ + |BH|^۲$ . با جایگذاری مقادیر معادل خواهیم داشت:

$$|AB| = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

و این همان دستوری است که به دنبالش بودیم. این دستور معرف یک متر در دستگاه مختصات است. شاید اصطلاح فضای متریک را شنیده باشید. بدین ترتیب صفحه مختصات یا همان $\mathbb{R}^۲$ با این دستور فاصله یابی یک فضای متریک است.

حال اگر $M$ وسط پاره‌خط $AB$ باشد، طول نقطه‌ی $M$ در واقع میانگین طول‌های نقاط $A, B$ است ، پس نتیجه می‌گیریم که $M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$ . این مختصات اگرچه ساده بنظر می‌آید، اما بسیار کاربردی است.

**تمرین ۹.۱.** با استفاده از مفهوم بردارهای برابر، مختصات وسط یک پاره‌خط را بیابید.

**مثال ۴.۱.** سه رأس مثلثی عبارتند از $C(۴,۱), B(۲,۵), A(۱,۲)$ . نشان دهید این مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی الساقین است.(تمرین کتاب درسی)

حل: محاسبات را انجام می‌دهیم.

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱۰} \\ |AC| = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۱۰} \\ |BC| = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۲۰} \end{cases} \Longrightarrow |AB|^۲ + |AC|^۲ = |BC|^۲$$

**پرسش ۱۲.۱.** نقاط $A(۵,۳), B(۱,۵)$ مفروضند. معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط $AB$ کدامست؟

۱) $y = ۲x - ۱$ ۲) $y = ۲x - ۲$ ۳) $y = x + ۱$ ۴) $y = x - ۲$

حل: داریم $(۳,۴) = \frac{A+B}{۲} = M$ پس خط ازاین نقطه می‌گذرد. از طرفی :

$$m_{AB} = \frac{۵-۳}{۱-۵} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{AB^\perp} = ۲$$

حال با داشتن شیب و یک نقطه گزینه ۲ بدست می آید.

**پرسش ۱۳.۱.** نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلعش منطبق بر خطوط $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشد. مختصات وسط قطر آن کدامست؟(۹۰ تجربی)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

حل: اولا نقطه‌ی $A$ روی هیچیک از خطوط داده شده نیست. پس اگر محل تلاقی این دو خط را راس $B$ بنامیم، آنگاه این دو راس $A, B$ مقابل یکدیگرند. پس وسط قطر، دقیقا وسط پاره خط $AB$ است. اما با حل دستگاه نظیر این دو خط محل تقاطع بصورت $B(-۱,۴)$ بدست می‌آید ولذا $M = \frac{A+B}{۲} = (۳,۵)$ .

**پرسش ۱۴.۱.** خط گذرا بر دو نقطه‌ی $P(a,b)$ , $Q(b,a)$ بر کدام خط زیر همواره عمود است؟(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) $y + x = ۰$ ۲) $y = bx + a$ ۳) $y = ax + b$ ۴) $y = x$

حل: با یک محاسبه سرراست داریم $m_{PQ} = -۱$ پس گزینه ۴ درست است.

**پرسش ۱۵.۱.** نقاط $A(۲,۳)$، $B(-۱,۰)$، $C(۱,-۲)$ رئوس یک مستطیل هستند. مختصات راس چهارم کدامست؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) $(۴,-۱)$   ۲) $(-۱,۴)$   ۳) $(۱,۴)$   ۴) $(۴,۱)$

حل: با توجه به اینکه در مستطیل قطرها منصف یکدیگرند، پس $\frac{B+D}{۲}=\frac{A+C}{۲}$ با جایگذاری مقادیر داریم $D(۴,۱)$.

**پرسش ۱۶.۱.** فاصله‌ی محل تلاقی دو خط $۲x+۳y=۴$ و $x-۲y=-۵$ از خط $x=۴$ کدامست؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

حل: از حل دستگاه نظیر دو خط داده شده محل تلاقی بصورت $(-۱,۲)$ حاصل می‌شود. حال فاصله‌ی این نقطه تا $x=۴$ بوضوح برابر ۵ واحد است.

برای به پایان رساندن این بخش آخرین دستور را ارائه می‌دهیم. فاصله یک نقطه ازخط. کتاب درسی با ارائه یک مثال، دستور کلی را نتیجه‌گیری کرده است. ما نیز از اثبات تقریبا طولانی و پردردسر آن در اینجا پرهیز کرده و در پیوست فصل اول، اثبات را برای دانش آموزان علاقمند مطرح می‌کنیم. فرض کنید که نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ خارج خط $ax+by+c=۰$ باشد. دراینصورت فاصله این نقطه تا خط که برابر طول عمودی است که از $A$ بر این خط رسم می شود از دستور زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

**پرسش ۱۷.۱.** فاصله نقطه $(-۲,۳)$ از خط $۳x-۴y-۱۲=۰$ کدامست؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۵   ۴) ۶

حل: با توجه به دستور داریم:

$$d=\frac{|-۶-۱۲-۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۳۰}{۵}=۶$$

**پرسش ۱۸.۱.** فاصله‌ی نفطه‌ی $(۲,-۱)$ از خط به معادله‌ی $۵x-۱۲y-m=۰$ برابر ۵ واحد است، مقدار مثبت $m$ کدامست؟

۱) ۱۰۰   ۲) ۱۰۲   ۳) ۱۰۵   ۴) ۱۰۷

حل: داریم

$$d = 5 = \frac{|10 + 12 - m|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|32 - m|}{13} = 5 \Rightarrow m = 107$$

**پرسش ۱۹.۱.** یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ قرار دارد. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن کدامست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴     ۲) ۵     ۳) ۷     ۴) ۶

حل: رأس مذکور روی خط داده شده نیست. پس کافیست فاصله‌ی این رأس را تا خط داده شده محاسبه کنیم. بدین منظور داریم:

$$\text{طول ضلع مربع} = d = \frac{|-2(3) + 1(0) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5} \Rightarrow S = 5$$

**مثال ۵.۱.** خط $d : 3x - 4y - 10 = 0$ مفروض است. چند نقطه روی خط $x + y + 1 = 0$ وجود دارد، که فاصله انها از خط $d$ برابر ۵ باشد؟

حل: داریم $y = -1 - x$ پس یک نقطه‌ی دلخواه روی خط بصورت $(a, -1 - a)$ است. حال فاصله‌ی این نقطه را تا خط مورد نظر برابر ۵ قرار می‌دهیم.

$$5 = \frac{|3a + 4 + 4a - 10|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow |7a - 6| = 25 \Rightarrow a = \frac{31}{7}, -\frac{19}{7}$$

**مثال ۶.۱.** معادله‌ی خط نیمساز زاویه‌ی بین دو خط $3x - 4y = 4$ و $5x - 12y - 6 = 0$ را بیابید.

حل: قبلا با مفهوم مکان هندسی آشنا شده‌اید. مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای یک ویژگی معین هستندو هر نقطه دیگر با این ویژگی نمی‌تواند خارج این مجموعه نقاط باشد. مثلا عمودمنصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند. حال در مورد نیم‌ساز هم یک مکان هندسی داریم. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند. حال تصور کنید که $M(x, y)$ یک نقطه از این مکان هندسی یا نیمساز باشد. لذا فاصله‌ی $M$ از دو خط یکسان است. اینها را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$\frac{|5x - 12y - 6|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|3x - 4y - 4|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow 5x - 12y - 6 = \pm\frac{13}{5}(3x - 4y - 4)$$

با ساده کردن رابطه‌ی فوق در دو حالت به دو جواب می‌رسید.(چرا دو جواب؟ مگر یک زاویه می‌تواند دو نیمساز داشته باشد؟)

**تذکر مهم:** اگر دو خط موازی باشند و هدف یافتن فاصله بین این دو خط موازی باشد، با انتخاب یک نقطه روی یکی و محاسبه فاصله‌اش تا دیگری می‌توان این فاصله را یافت. با اینحال می‌توان دستور ساده‌تری ارائه کرد. فرض کنید معادلات دو خط موازی بصورت $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ باشند.دراینصورت فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$\boxed{d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

همچنین فاصله‌ی مبدا مختصات تا خط $ax+by+c=0$ دستور ساده شده‌ای بصورت زیر دارد:

$$\boxed{d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

**پرسش ۲۰.۱.** اگر فاصله‌ی دو خط موازی $2x-4y+3=0$ , $8y+ax+b=0$ برابر $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ باشد، مقدار $a+b$ کدامست؟(نشان برتر)

۱) $-14$  ۲) ۱۸  ۳) ۶  ۴) ۱۴

حل: با توجه به توازی دو خط باید $\frac{8}{-4}=\frac{a}{2}$ و از اینجا $a=-4$ بدست می‌آید. پس معادله ی خط بصورت $8y-4x+b=0$ است. حال معادله‌ی اول را در $-2$ ضرب کرده تا ضرایب یکسان شوند و داریم $8y-4x-6=0$ و فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$d=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{|-6-b|}{\sqrt{64+16}}=\frac{|b+6|}{4\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow b=10,-22\Rightarrow a+b=6$$

**پرسش ۲۱.۱.** قرینه‌ی خط $3x+4y=5$ نسبت به خط $y=\frac{20-6x}{8}$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟ (نشان برتر)

۱) $(3,1)$  ۲) $(-3,1)$  ۳) $(1,3)$  ۴) $(-1,-3)$

توجه داریم خط داده شده، یعنی $y=\frac{20-6x}{8}=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x$ برابر $4y+3x-10=0$ است. این دو خط موازیند و قرینه‌ی آن بصورت $4y+3x+c=0$ است به گونه‌ای که $-10=\frac{c-5}{2}$ باشد. پس $x=-15$ است ولذا معادله‌ی خط قرینه بصورت $4y+3x-15=0$ است و این خط از گزینه‌ی ۳ می‌گذرد.

**پرسش ۲۲.۱.** دو خط $5x-12y+8=0$ و $-10x+24y+10=0$ مفروضند. فاصله‌ی این دو خط موازی کدامست؟ ( برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) ۴  ۲) ۳  ۳) ۲  ۴) ۱

حل: ابتدا معادله‌ی دوم را بر $-2$ تقسیم کرده تا معادله‌ی $5x-12y-5=0$ حاصل شود. حال بنا به دستور ارائه شده داریم:

$$d=\frac{|8-(-5)|}{\sqrt{25+144}}=1$$

**پرسش ۲۳.۱.** نقاط $O(0,0), A(-1,2), B(2,5)$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت مثلث کدامست؟

۱) ۳٫۵    ۲) ۴٫۵    ۳) ۷    ۴) ۹

ابتدا ضلع $AB$ را محاسبه کرده و داریم : $|AB| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ و معادله‌ی خط گذرنده از این دو نقطه نیز برابر است با $y = x + 3$ حال برای محاسبه ارتفاع فاصله $O(0,0)$ را تا این خط محاسبه کرده و داریم :

$$d = h = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

پس مساحت این مثلث برابر است با $S_{\Delta OBC} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2} = 9$ .

**تذکر:** اگر طول سه ضلع مثلث را محاسبه کنید، می‌توانید از دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث استفاده کرد. اگر $P$ نصف محیط مثلث باشد مساحت این مثلث برابر است با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

البته این دستور زمانی‌که اضلاع اعدادی صحیح یا گویا باشند، محاسباتی راحت‌تر دارد.

**تمرین ۱۰.۱.** دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و مماس بر خط $y + x = 0$ مفروض است. طول وتری که محور عرض‌ها از این دایره جدا می‌کند را بیابید.

**تمرین ۱۱.۱.** نقاطی از خط نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم بیابید که فاصله‌ی انها از خط $y = 2x - 1$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

**تمرین ۱۲.۱.** خطوط $y + x = -1, \ y + ax = 3$ دو ضلع یک مستطیل و نقطه‌ی $A(0,5)$ یک راس آن است. مساحت مستطیل را بیابید.

**تمرین ۱۳.۱.** نقاط $(4,0), (1,2)$ و مبدا مختصات، رئوس یک مثلث هستند. اگر عمودمنصف ضلع بزرگتر، امتداد ضلع کوچک مثلث را در نقطه‌ی $R$ قطع کند، فاصله‌ی نزدیکترین و دورترین راس را تا نقطه‌ی $R$ بیابید.

**تمرین ۱۴.۱.** دو نقطه‌ی $A(-1,-2), B(1,4)$ دو راس مقابل یک مربع هستند. محل برخورد اقطار مربع و همچنین مساحت مربع را بیابید.

**تمرین ۱۵.۱.** نقطه‌ی $A(3,-1)$ محل برخورد اقطار مربعی هستند که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $2y - x = 5$ است. مساحت مربع را بیابید.

**تمرین ۱۶.۱.** فاصله‌ی مبدأ مختصات از محل برخورد خطوط $3y = 4x + 2, y - 2x = 0$ چقدر است؟

**تمرین ۱۷.۱.** نقطه‌ی $A(5,9)$ یک راس متوازی‌الاضلاع و دو راس غیر متقابل آن به طول‌های ۲ و ۶ بر روی خط به معادله‌ی $y = 2x - 3$ منطبقند. مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید.

**تمرین ۱.۱۸.** خط $۳y - ۵x + ۳۰ = ۰$ محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی $A, B$ قطع می‌کند. مساحت مثلث $OAB$ را بیابید.

**تمرین ۱.۱۹.** فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰ \ , \ y = \sqrt{۳}x + ۲$ را بیابید.

**تمرین ۱.۲۰.** دو نقطه‌ی $B(۲m, m), A(۰, m-۲)$ مفروضند. اگر فاصله‌ی مبدأ مختصات از وسط $AB$ برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مقدار $m$ را بیابید.

**تمرین ۱.۲۱.** از نقطه‌ی $A$ به‌طول $-۴$ واقع بر خط $۴x - ۳y + ۱۶ = ۰$ عمودی بر این خط رسم گردیده است و در نقطه‌ی $B$ محور عرض‌ها را قطع نموده است. طول پاره‌خط $AB$ را محاسبه کنید.

**تمرین ۱.۲۲.** مقدار $a$ را چنان بیابید تا نقاط $(۳, a), (۲, ۰), (۱, ۱)$ بر یک استقامت باشند.

**تمرین ۱.۲۳.** فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $۲y + \sqrt{۵}x - ۶ = ۰$ را بیابید.

**تمرین ۱.۲۴.** معادله‌ی خط نیمساز دو خط با معادلات $۳x - ۴y = ۴ \ , \ ۱۲x + ۵y = ۹$ را بیابید.

**تمرین ۱.۲۵.** مساحت مثلثی با رئوس $C(۰, ۲), B(۳, ۰), A(۲, ۵)$ را بیابید.

**تمرین ۱.۲۶.** دو نقطه بر روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم وجود دارند که از خط $x + ۲y = ۰$ به فاصله‌ی $۲\sqrt{۵}$ هستند. اگر این دو نقطه را $B, A$ بنامیم، مساحت مثلث $ABC$ را بیابید که در آن $C$ نقطه‌ای به عرض ۳ روی محور عرض‌هاست.

**تمرین ۱.۲۷.** اضلاع یک مثلث بر خطوط $AB : x + y = ۳$ ، $AC : y = ۳x - ۱$ و $BC : ۳x - ۴y = ۱$ قرار دارند. طول ارتفاع $AH$ از این مثلث چقدر است؟

## یادآوری از کلاس دهم

روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال‌ها[۳] بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ تعریف می کنیم. $\Delta$ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta < ۰ \ , \ \Delta > ۰ \ , \ \Delta = ۰$ ممکن است اتفاق بیافتد.

[۳] حل معادلات چندجمله‌ای به کمک رادیکال‌ها یکی از جذابترین بخش‌های تاریخ ریاضیات است. شاید حدود چندین قرن ریاضیدانان بزرگ در تلاش برای یافتن چنین راه‌حلی برای هر معادله از درجه دلخواه بودند. اواریست گالوا ریاضیدان جوان و نامدار فرانسوی ثابت کرد حل معادلات درجه چهار به بالا به کمک رادیکال امکان‌پذیر نیست. متاسفانه وی در یک دوئل سیاسی از پیش طراحی شده، در سن بیست سالگی در سال ۱۸۳۲ کشته شد. علت دوئل به ظاهر نبرد بر سر شرافت به خاطر یک زن بدکاره بود. اما به گواه تاریخ، این دوئل ساختگی بود و هیئت حاکمه‌ی وقت، تحمل یک جوان بیست ساله بسیار زیرک و باهوش که براحتی در یک سخنرانی خیابانی هزاران نفر را جذب خود می‌کرد، نداشت. زنده یاد پرویز شهریاری یک بیوگرافی کامل از وی ترجمه کرده است.

$$
\begin{aligned}
ax^2+bc+c=0 &\Longrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\\
&\Longrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0\\
&\Longrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\
&\Longrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
&\Longrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&\Longrightarrow x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}
$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو جواب $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ , $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد. اگر $\Delta=0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم : $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta<0$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی[4] ندارد.

$$
\Delta:\begin{cases}
\Delta>0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد}\\[2em]
\Delta=0\Longrightarrow x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد}\\[1em]
\Delta<0\Longrightarrow & \text{معادله جواب حقیقی ندارد}
\end{cases}
$$

## ۳.۱ معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

دراین بخش ابتدا روش تغییر متغیر برای حل برخی معادلات، که به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم قابل حل هستند را بررسی می‌کنیم که البته تکنیکی بسیار مهم و کاربردی است. سپس ارتباط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم را بررسی می کنیم. درانتها ماکزیمم و مینیمم تابع درجه دو یا همان سهمی‌ها و کاربردهایی از آن را خواهیم دید. این کاربردها در مسائل بهینه‌سازی نقشی کلیدی دارند.

[4] کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد.در واقع در حالتی که $\Delta<0$ است بازهم معادله جواب دارد اما این جواب ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند.کارل فردریش گاوس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه $n$ حداکثر $n$ ریشه حقیقی دارد.

### ۱.۳.۱ روش تغییر متغیر

در کلاس دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه ۲ آموختیم. یک جنبه اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیزوجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس بعدی به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد و نسبتاً متداول برای حل انواع معادله است.

**مثال ۷.۱.** معادلات زیر را حل کنید.

$$۱)\ ۲x^۴ - ۷x^۲ - ۴ = ۰ \qquad ۲)\ (۳x^۲ - ۱)^۲ - ۱۳(۳x^۲ - ۱) + ۲۲ = ۰$$

$$۳)\ \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ + ۲\left(x + \frac{۱}{x}\right) = ۸ \qquad ۴)\ \frac{x^۲ + ۳x - ۱}{x^۲ + ۵} + \frac{x^۲ + ۵}{x^۲ + ۳x - ۱} = ۲$$

**حل۱:** تعویض متغیر را بصورت $u = x^۲$ لحاظ می‌کنیم. لذا معادله بصورت $۲u^۲ - ۷u - ۴ = ۰$ حاصل می‌شود. از حل این معادله داریم: $u = ۴,\ -\frac{۱}{۲}$ که جواب منفی قابل قبول نیست. پس $x^۲ = ۴$ و $x = \pm ۲$ .

**حل۲:** قرار می‌دهیم $u = ۳x^۲ - ۱$ پس داریم $u^۲ - ۱۳u + ۲۲ = ۰$ و از حل این معادله داریم $u = ۲, ۱۱$ پس باید این دو معادله را حل کنیم $۳x^۲ - ۱ = ۲$ و $۳x^۲ - ۱ = ۱۱$ که پس از حل آنها به جواب‌های $x = \pm ۱, \pm ۲$ خواهیم رسید.

**حل۳:** قرار می‌دهیم $u = x + \frac{۱}{x}$ دراینصورت معادله بصورت $u^۲ + ۲u - ۸ = ۰$ حاصل می‌شود. از حل این معادله داریم $u = ۲, -۴$ که با برگرداندن متغیر اصلی داریم:

$$\begin{cases} x + \frac{۱}{x} = ۲ \\ x + \frac{۱}{x} = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

**حل۴:** قرار می‌دهیم $u = \frac{x^۲ + ۳x - ۱}{x^۲ + ۵}$ و داریم $u + \frac{۱}{u} = ۲$ و از حل این معادله $u = ۱$ حاصل می‌شود. حال داریم $\frac{x^۲ + ۳x - ۱}{x^۲ + ۵} = ۱$ و با حل این معادله $x = ۲$ تنها جواب معادله بدست می‌آید.

**تمرین ۲۸.۱.** با تعویض متغیر مناسب جوابهای معادله‌ی $(x^۲ - ۲)^۲ + x^۲ = ۴$ را بیابید.

**تمرین ۲۹.۱.** جواب‌های معادله‌ی $\left(\frac{x^۲}{۳} - ۲\right)^۲ - ۷\left(\frac{x^۲}{۳} - ۲\right) + ۶ = ۰$ را بیابید.

**تمرین ۳۰.۱.** معادله‌ی $\left(\frac{x^۲ + ۳}{x^۲ + ۱}\right)^۲ + \frac{۶}{x^۲ + ۱} - ۷ = ۰$ را با تعویض متغیر مناسب حل کنید.

**مثال ۸.۱.** پاسخ دهید.

۱. یک معادله‌ی درجه ۴ بنویسید که ریشه نداشته باشد. پاسخ: $x^۴ + ۱ = ۰$

۲. یک معادله‌ی درجه چهار بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد. پاسخ: $(x-۱)^۴ = ۰$

۳. یک معادله‌ی درجه چهار بنویسید که تنها دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد. پاسخ: $(x^۲-۱)^۲ = ۰$

۴. یک معادله‌ی درجه چهار بنویسید که دقیقا سه ریشه ی متمایز داشته باشد. پاسخ: $(x^۲-۱)(x-۲)^۲ = ۰$

۵. یک معادله‌ی درجه چهار بنویسید که چهار ریشه‌ی متمایز داشته باشد. پاسخ: $(x^۲-۱)(x^۲-۴) = ۰$

۶. آیا یک معادله‌ی درجه چهار می‌تواند بیش از چهار ریشه داشته باشد؟ پاسخ: خیر

**پرسش ۲۴.۱.** به ازای کدام مجموعه مقادیر $m$ از معادله‌ی $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ دو جواب متمایز برای $x$ حاصل می‌شود؟ (خارج تجربی ۸۸)

۱) $m \geq ۱$	۲) $m < ۲$	۳) $۱ \leq m < ۲$	۴) $\varnothing$

حل: قرار می‌دهیم $\sqrt{x} = u$ پس داریم $u^۲ - ۲u + m - ۱ = ۰$ و این معادله باید دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد تا معادله‌ی رادیکالی اصلی دو ریشه‌ی متمایز بدهد. پس باید:

$$\begin{cases} \Delta = ۸ - ۴m \geq ۰ \Rightarrow m < ۲ \\ \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad \Rightarrow ۱ < m < ۲ \\ -\dfrac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\dfrac{-۲}{۱} = ۲ > ۰ \end{cases}$$

توجه کنید که برای $m = ۱$ یک جواب معادله صفر و دیگری ۴ است که شرایط حکم را دارد ولذا گزینه ۳ جواب درست است.

### ۲.۳.۱ ارتباط بین ضرائب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دو

همانطور که در قسمت یادآوری دیده‌اید، یک معادله‌ی درجه دوم بسته به علامت $\Delta$ می‌تواند حداکثر دو ریشه داشته باشد. اگر در معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشته باشیم $\dfrac{c}{a} < ۰$ دراینصورت همواره $\Delta > ۰$ خواهد بود.(چرا؟) و معادله دارای دو ریشه حقیقی چون $\alpha, \beta$ خواهد بود. چه رابطه‌ای بین ضرائب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم برقرار است؟ ابتدا اجازه دهید ریشه‌ها را جمع بزنیم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

به همین ترتیب حاصلضرب ریشه‌ها را نیز می‌توان یافت.

$$P=\alpha\times\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

به عنوان یک مثال ساده در معادله‌ی $۲x^۲-۶x+۴=۰$ دو ریشه چنانند که مجموعشان $۳=-\frac{b}{a}$ و حاصلضربشان $۲=\frac{c}{a}$ است. بعکس فرض کنید که دو ریشه‌ی یک معادله‌ی درجه دوم را داده باشند و خود معادله را خواسته باشند. تصور کنید که این ریشه‌ها $\alpha,\beta$ باشند. یک راه ساده و زیرکانه آنست که معادله را بصورت $(x-\alpha)(x-\beta)=۰$ بنویسیم. این درست است. اگرچه می توان این معادله را در هر عدد غیرصفری ضرب کرد، اما معادله‌ی حاصل با اولی هم‌ارز است. حال آن‌را کمی ساده کرده داریم: $x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=۰$ که شکل کلی معادله درجه دوم را دارد. پس با داشتن مجموع و حاصلضرب ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم می‌توان خود معادله را یافت:

**تشکیل معادله با داشتن مجموع و حاصلضربشان** $\longleftarrow$ $x^۲-Sx+P=۰$

**مثال ۹.۱.** معادله‌ی درجه دومی بسازید که ریشه‌های آن اعداد $\frac{۱}{۱۰+\sqrt{۷۲}},\frac{۱}{۱۰-\sqrt{۷۲}}$ باشند.

حل: باید مقادیر $S,P$ را یافت. داریم:

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{۱۰+\sqrt{۷۲}}+\frac{۱}{۱۰-\sqrt{۷۲}}=\frac{۲۰}{۲۸} \\ P=\frac{۱}{۱۰+\sqrt{۷۲}}\times\frac{۱}{۱۰-\sqrt{۷۲}}=\frac{۱}{۲۸}\end{cases}\Rightarrow x^۲-\frac{۲۰}{۲۸}x+\frac{۱}{۲۸}=۰$$

**مثال ۱۰.۱.** اگر $\beta\ ,\ \alpha$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۷x+۴=۰$ باشند مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

$۱)\alpha^۲+\beta^۲$ $۲)\alpha^۳+\beta^۳$ $۳)\alpha^۴+\beta^۴$

$۴)\beta^۲+۷\alpha-۴$ $۵)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $۶)\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$

حل: ابتدا توجه داریم که $S=۷,P=۴$ است. برای قسمت ۱ از اتحاد $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$ استفاده می‌کنیم. پس $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۴۹-۸=۴۱$ . برای قسمت ۲ بازهم اتحاد زیر را داریم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=۷^۳-۳(۴)(۷)=۳۴۳-۸۴=۲۵۹$$

برای قسمت ۳ بازهم اتحادی مشابه ۱ داریم:

$$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=۴۱^۲-۲(۱۶)=۱۶۴۹$$

برای قسمت ۴ ابتدا توجه کنید که $\beta$ ریشه‌ی معادله است و در معادله صادق است یعنی $\beta^۲ - ۷\beta + ۴ = ۰$ و این یعنی $\beta^۲ = ۷\beta - ۴$ پس مقدار ۴ برابر است با $۷\beta - ۴ + ۷\alpha - ۴ = ۷S - ۸ = ۴۱$ . برای قسمت ۵ عبارت را برابر $A$ گرفته و داریم:

$$A^۲ = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + ۲ = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow A = \frac{۷}{۲}$$

مورد ۶ ساده‌ترین قسمت است.

**مثال ۱.۱۱.** معادله‌ی درجه دوم $۳x^۲ - x - ۱ = ۰$ مفروض است.معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که:

۱. ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند.

۲. ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند.

۳. از دوبرابر ریشه‌های معادله‌ی فوق ۴ واحد کمتر باشند.

۴. قرینه و معکوس ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند.

حل: ابتدا توجه کنید که در معادله‌ی اصلی $S = \frac{۱}{۳}, P = -\frac{۱}{۳}$ است. حال با فرض اینکه $\alpha, \beta$ ریشه‌های معادله‌ی اصلی باشند، برای ۱ باید معادله‌ای بسازیم که ریشه‌هایش $\alpha^۲, \beta^۲$ باشد. داریم:

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = \frac{۱}{۹} - ۲\frac{-۱}{۳} = \frac{۷}{۹}$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^۲\beta^۲ = P^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۹}x + \frac{۱}{۹} = ۰$$

برای قسمت دوم باید $\alpha^۳ + \beta^۳$ محاسبه شود. داریم:

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}} = \alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS = \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۲۷} \\ P_{\text{جدید}} = \alpha^۳\beta^۳ = P^۳ = -\frac{۱}{۲۷} \end{cases} \Rightarrow x^۲ - \frac{۱۰}{۲۷}x - \frac{۱}{۲۷} = ۰$$

در دو حالت باقیمانده ریشه‌ها عبارتند از $\{۲\alpha - ۴, ۲\beta - ۴\}$ و $\{-\frac{۱}{\alpha}, -\frac{۱}{\beta}\}$ که در هر حالت می‌توانید $S, P$ جدید را محاسبه کنید.

برای روشن شدن بیشتر مطالب فوق چند سوال از کنکور سراسری سنوات گذشته را مرور می‌کنیم.

**پرسش ۱.۲۵.** اگر $\alpha$ , $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x(۵x + ۳) = ۲$ باشند،به ازای کدام مقدار $k$ مجموعه جواب‌های معادله‌ی $۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰$ بصورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^۲} , \frac{۱}{\beta^۲}\right\}$ است؟(ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷    ۲) ۲۸    ۳) ۲۹    ۴) ۳۱

حل: در معادله‌ی $x(5x+3)=2$ با بازکردن معادله داریم: $S=-\frac{3}{5}$ و $P=-\frac{2}{5}$ و حال در معادله‌ای $4x^2-kx+25=0$ داریم:

$$S=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{29}{4}=\frac{k}{4}\Rightarrow k=29$$

**پرسش ۲۶.۱.** اگر $\alpha$ , $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-12x+1=0$ باشد،مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل: در معادله‌ی اصلی $S=3, P=\frac{1}{4}$ است. حال عبارت مورد نظر را $A$ می نامیم. داریم:

$$A^2=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{P}+\frac{2}{\sqrt{P}}=16\Rightarrow A=4$$

**پرسش ۲۷.۱.** در معادله‌ی $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است.$m$ کدامست؟(خارج ریاضی ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

حل: با توجه به مفروضات داریم:

$$\begin{cases}\alpha-\dfrac{\beta}{2}=5\\ \alpha+\beta=8\end{cases}\Rightarrow \alpha=6,\beta=2\Rightarrow \alpha\beta=12\Rightarrow m=12$$

**پرسش ۲۸.۱.** اگر $\alpha,\beta$ جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^3$ کدامست؟

۱) ۱۳۶ ۲) ۱۳۸ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۴۴

حل: در معادله‌ی داده شده داریم $\frac{c}{a}=1$ و این یعنی $\alpha.\beta=1$ و لذا $\alpha=\frac{1}{\beta}$ و از این نتیجه می‌شود که:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^3+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^3=(2\alpha)^3+(2\beta)^3=8(\alpha^3+\beta^3)=8(S^3-3PS)=144$$

**پرسش ۲۹.۱.** اگر $\alpha,\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^3+15\beta$ کدامست؟

۱) ۶۰ ۲) ۵۶ ۳) ۶۴ ۴) ۵۲

حل: چون $\alpha$ ریشه‌ی معادله است پس $\alpha^۲ = ۴\alpha - ۱$ و از اینجا داریم $\alpha^۳ = ۴\alpha^۲ - \alpha = ۴(۴\alpha - ۱) - ۱$ و نهایتا $\alpha^۳ = ۱۵\alpha - ۴$ و از اینجا داریم:

$$\alpha^۳ + ۱۵\beta = ۱۵\alpha - ۴ + ۱۵\beta = ۱۵(\alpha + \beta) - ۴ = ۵۶$$

**پرسش ۳۰.۱.** معادله‌ی $۴x^۲ - (m + ۱)x + ۳ = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است بطوریکه یکی سه برابر دیگری است. مقدار $m$ کدامست؟

۱) ۷ ۲) $-۹$ ۳) $-۷$ ۴) ۹

حل: از اینکه $a = ۳b$ است نتیجه می‌شود $a^۲ = ۳ab = \frac{۹}{۴}$ و از اینجا با توجه به منفی بودن ریشه‌ها داریم $a = -\frac{۳}{۲}$ و ریشه‌ی دیگر $b = -\frac{۱}{۲}$ است. پس $S = a + b = -۲ = \frac{m + ۱}{۴}$ است و از اینجا مقدار $m = -۹$ حاصل می‌شود.

**پرسش ۳۱.۱.** اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^۲ - x - ۵) = ۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر معادله کدامست؟ (خارج ۸۷)

۱) $-۲$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: ابتدا عدد ۲ را در معادله جایگذاری کرده و سپس داریم $a = ۲$ حال معادله را بازنویسی کرده و بصورت $۲x^۳ - x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ می‌نویسیم. با علم به اینکه یک ریشه ۲ بوده است با تقسیم معادله بر عبارت $x - ۲$ خواهیم داشت: $(x - ۲)(۲x^۲ + ۳x + ۱) = ۰$ و عبارت درون پرانتز دوم شامل دو ریشه دوم است و مجموع این دو ریشه نیز برابر $-\frac{b}{a} = \frac{-۳}{۲}$ است.

**تمرین ۳۱.۱.** اگر $b, a$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند، معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\left\{a - \frac{۲}{b}, b - \frac{۲}{a}\right\}$ باشند.

**تمرین ۳۲.۱.** اگر $a$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۵ = ۰$ باشد، حاصل عبارت $(a+۱)(a-۲)(a-۵)$ را بیابید.

**تمرین ۳۳.۱.** اگر $b, a$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۲x - ۲ = ۰$ باشند، حاصل $\frac{a^۳}{(b + ۲)^۳}$ را بیابید.

**تمرین ۳۴.۱.** اگر $b, a$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مقدار $a^۲ - ۴a - b$ را بیابید.

**تمرین ۳۵.۱.** در معادله‌ی درجه دوم $(k + ۱)x^۲ - (k + ۳)x + k = ۰$ مجموع معکوس مربعات ریشه ها برابر ۱۲ است. مقادیر قابل قبول برای $k$ را بیابید.

**تمرین ۳۶.۱.** معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش عکس مربع ریشه‌های $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند.

**تمرین ۳۷.۱.** اگر رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - mx = ۲$ بصورت $\alpha(۱ + \beta) = ۲$ باشد مقدار $m$ را بیابید.

### ۳.۳.۱ نمودار و اکسترمم‌های تابع درجه‌ی دوم

تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با فرض $a \neq 0$ مفروض است. همان طور که در سال دهم با نمودار این تابع آشنا شده‌اید،به این تابع سهمی نیز می‌گویند و همواره دارای یک ماکزیمم یا مینیمم است. در واقع راس سهمی همان نقطه‌ی اکسترمم است که با شرط $a > 0$ مینیمم و با شرط $a < 0$ ماکزیمم است. با کمی محاسبه می توان مختصات نقطه‌ی اکسترمم را یافت. می‌دانیم که اگر یک سهمی بصورت نجیب $y = a(x-h)^2 + k$ باشد آنگاه نقطه‌ی $(h, k)$ اکسترمم سهمی‌است. پس معادله‌ی سهمی درحالت کلی را به فرم نجیب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\Longrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &\Longrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &\Longrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &\Longrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\text{راس سهمی} \longrightarrow M\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیست یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > 0$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < 0$ باشد سهمی ماکزیمم(بیشینه) دارد.

**مثال ۱۲.۱.** ماکزیمم تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را بیابید.

حل: داریم $x_{max} = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$ از اینجا مقدار ماکزیمم حاصل می‌شود. $y_{max} = f(1) = 4$ .

**مثال ۱۳.۱.** سهمی $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$ را رسم کنید.

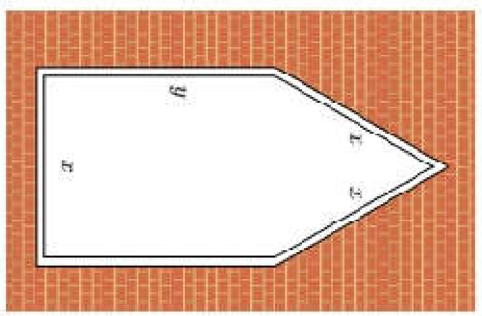
حل: ابتدا می‌نیمم سهمی را پیدا می‌کنیم. $x_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$ و حال با جایگذاری این طول در تابع اصلی داریم: $y_{min} = f(4) = 32 - 48 + 21 = 5$. ترسیم آن حال کار ساده‌ای است.

**مثال ۱۴.۱.** یک ماهیگیر میخواهد درکنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

حل: محوطه مستطیلی است که یک طول آن حذف شده است. اگر $x$ عرض و $y$ طول مستطیل باشد، آنگاه محیط برابر $y + ۲x = ۱۰۰$ و مساحت این محوطه برابر $S = xy = x(۱۰۰ - ۲x)$ است.

$$S(x) = ۱۰۰x - ۲x^۲ \Rightarrow x_{max} = -\frac{b}{a} = -\frac{۱۰۰}{-۴} = ۲۵ \Rightarrow x = ۲۵, y = ۵۰$$

**مثال ۱.۱۵.** پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دربالای آن میباشد. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد. منظور مسأله آنست که مقادیر مجهول را طوری بیابید که پنجره دارای بیشترین مساحت ممکن باشد.




حل: محیط پنجره ۴ متر است و $۳x + ۲y = ۴$ از طرفی مساحت پنجره برابر است با:

$$S = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}} = \frac{x^۲\sqrt{۳}}{۴} + x(۲ - \frac{۳}{۲}x) = \left(\frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}\right) x^۲ + ۲x$$

این سهمی در $x = \dfrac{۴}{۶ - \sqrt{۳}}$ ماکزیمم می‌شود.

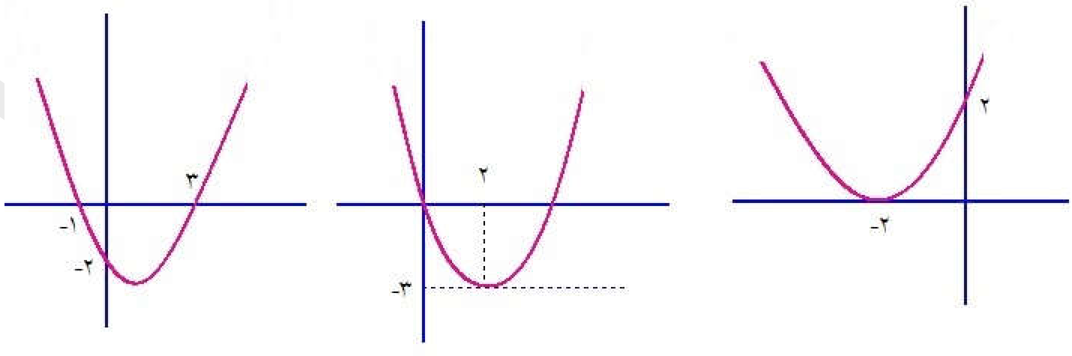
**تمرین ۱.۳۸.** مجموع برابر مقدار ثابت $c$ است. چه زمان حاصلضرب ایندو عدد ماکزیمم است.

**تمرین ۱.۳۹.** بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که می توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود،۶۴۸ متر مربع است.طول طناب چند متر است؟(جواب:طول طناب=۷۲ متر ریاضی خارج ۸۴)

**تمرین ۱.۴۰.** بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟(ریاضی خارج ۹۱)

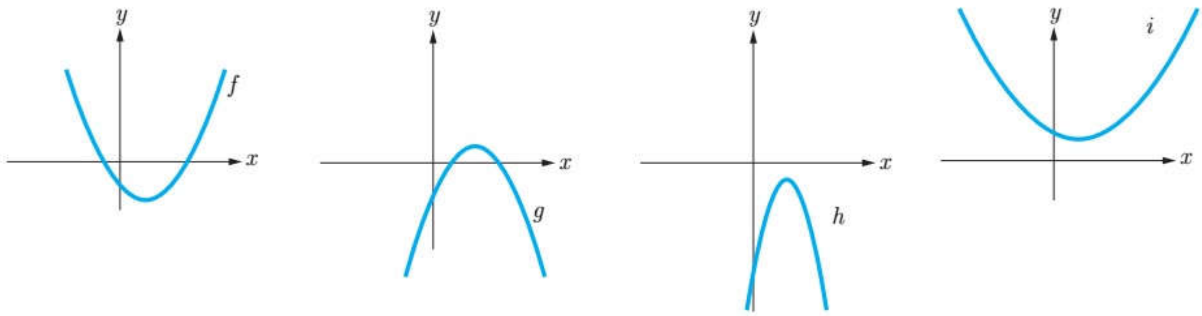
۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

**مثال ۱.۱۶.** با توجه به شکل‌های زیر در هر مورد معادله‌ی سهمی را بیابید.



حل: در اولین شکل ، سهمی بر محور طولها در طول ۲− مماس است. لذا معادله‌ی آن بصورت $f(x)=a(x+۲)^۲$ است. چون $f(۰)=۲$ است، پس $a=\frac{۱}{۲}$ و معادله‌ی سهمی بدست می آید.
در سهمی دوم بنا به تقارن سهمی و اینکه سهمی از مبدا گذشته است، معادله بفرم $f(x)=ax(x-۴)$ است. از طرفی $f(۲)=-۳$ است. پس $a=\frac{۳}{۴}$ و معادله‌ی سهمی بصورت $f(x)=\frac{۳}{۴}x^۲-۳x$ حاصل می‌شود.
در سهمی سوم اعداد $-۱,۳$ ریشه‌های سهمی‌اند. پس معادله‌ی سهمی بصورت $f(x)=a(x+۱)(x-۳)$ است. از طرفی $f(۰)=-۲=-۳a$ پس $a=\frac{۲}{۳}$ .

**مثال ۱.۱۷.** در سهمی‌های زیر با توجه به شکل و وضعیت اکسترمم و ریشه‌ها در مورد ضرائب و علامت آنها بحث کنید.




حل: در مورد $i$ چون سهمی مینیمم است پس $a>۰$ و چون طول مینیمم در ناحیه اول است پس $\frac{-b}{a}>۰$ است و این یعنی $b<۰$ و نهایتا $f(۰)=c>۰$ است.
در مورد $h$ توجه داریم که سهمی ماکزیمم است. پس $a<۰$ است. همچنین $f(۰)=c<۰$ . همچنین طول ماکزیمم مثبت است و باید $\frac{-b}{a}>۰$ باشد. پس $b<۰$ است. وضعیت ضرائب را به طریق مشابه می‌توان بدست آورد.

**پرسش ۱.۳۲.** اگر منحنی به معادله‌ی $y=۲x^۲-۴x+m-۳$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند،آنگاه مجموعه مقادیر $m$ به کدام صورت است؟(ریاضی۸۷)

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۴<m<۵$

حل: باید دو ریشه‌ی مثبت داشته باشیم:

$$\begin{cases}\Delta'=b'^۲-ac=۴-۲(m-۳)>۰\Rightarrow m<۵\\ P=\frac{c}{a}=\frac{m-۳}{۲}>۰\Rightarrow m>۳\end{cases}\quad\Rightarrow ۳<m<۵$$

**پرسش ۱.۳۳.** به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$ هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$ در بالای محور طولهاست؟(ریاضی خارج ۸۹)

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

حل: ضریب پیشرو مثبت و دلتا منفی است. پس $\Delta' = ۲ - a(a-۱) < ۰$ که جواب آن پس از حل بصورت $a < -۱, a > ۲$ است که با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ درست است.

**پرسش ۳۴.۱.** نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ محور طولها را در نقطه‌ای به طول یک و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶− قطع کرده و از نقطه‌ی $(-۲, -۶)$ می‌گذرد،$f(-۱)$ کدامست؟(تجربی ۸۹ خارج)

۱) $-۸$ ۲) $-۷$ ۳) $-۵$ ۴) $-۴$

حل: از اینکه $f(۰) = -۶$ است، پس $c = -۶$ خواهد بود. از $f(۱) = ۰, f(-۲) = -۶$ یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل می‌شود که جواب آن بصورت $a = ۲, b = ۴$ است. پس داریم $f(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۶$ و لذا $f(-۱) = -۸$ است.

**پرسش ۳۵.۱.** به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$ نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟(ریاضی ۹۲)

۱) $a \leq ۲$ ۲) $۰ < a \leq ۲$ ۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۳$

حل: باید سهمی ماکزیمم داشته باشد، پس $a < ۳$ است. از طرفی اگر $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه باشد، باید هر دو منفی باشند تا سهمی از ناحیه اول نگذرد. با این حساب داریم :

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow a > ۲\,,\ a < -۶ \\ P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳ \\ S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-a}{a-۳} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \end{cases} \Longrightarrow a < -۶$$

حال اگر $\Delta \leq ۰$ باشد، باید $a^۲ + ۴a - ۱۲ \leq ۰$ باشد که این نیز دارای جوابی بصورت $-۶ \leq a \leq ۲$ است. حال جواب کل گزینه ۱ استخراج می‌شود.

**پرسش ۳۶.۱.** بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟(ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

حل: داریم :

$$\begin{cases} S = xy \\ ۲x + y = ۸۸ \end{cases} \Longrightarrow S = x(۸۸ - ۲x) = -۲x^۲ + ۸۸x \Rightarrow x_{max} = ۲۲, S = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

**پرسش ۳۷.۱.** به ازای کدام مجموعه مقادیر $m$ ، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محور طول‌ها را در هر دو طرف مبدا مختصات قطع می‌کند؟(خارج ۹۵)

۱) $m>1\,,\,m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

حل: باید معادله‌ی $(m+2)x^2+3x+1-m=0$ دارای دو ریشه مختلف‌العلامه باشد. پس باید $P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1-m}{m+2}<0$ باشد و لذا گزینه‌ی یک درست است.

**پرسش ۳۸.۱.** به ازای کدام مقدار $a$ نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$ همواره بالای محور طول‌هاست؟ (سراسری ۹۶ خارج)

۱) $a<1$ ۲) $a<-2$ ۳) $a>3$ ۴) $-2<a<1$

حل: شروط همواره مثبت بودن یک سهمی عبارتند از $\Delta<0\,,\,a>0$ حال این شروط را ساده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta'=6-(1-a)(-a)=-a^2+a+6<0\\ 1-a>0\end{cases}\Longrightarrow a<-2$$

**پرسش ۳۹.۱.** به ازای کدام مقدار $a$ معادله‌ی $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟(سراسری ۹۶ داخل)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

حل: با محاسبه $\Delta'=(a-2)^2-(14-a)=a^2-3a-10>0$ داریم $a>5, a<-2$ و از طرفی باید حاصلضرب و حاصلجمع ریشه‌ها مثبت باشد که به ترتیب از آنها $a<14$ و $a>2$ حاصل می‌شود. از اشتراک جوابها گزینه ۴ حاصل است.

**تمرین ۴۱.۱.** محور تقارن سهمی $y=x^2+4x+k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض $-2$ قطع می کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور طول‌ها ایجاد می کند را بیابید.

**تمرین ۴۲.۱.** مستطیلی به محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول و خط $y=\dfrac{4-x}{2}$ محدود است. ماکزیمم مساحت این مستطیل را بیابید.

**تمرین ۴۳.۱.** مقادیر $a$ را چنان بیابید تا سهمی $y=(a-3)x^2+ax-1$ فقط از ناحیه‌ی اول نگذرد.

**تمرین ۴۴.۱.** حدود $m$ را چنان بیابید تا سهمی $y=mx^2-2x+2-m$ از ناحیه‌ی سوم مختصات عبور نکند.

**تمرین ۴۵.۱.** یک ضلع مستطیلی روی محور طول‌ها و دو رأسش روی منحنی $y=4-|x|, x\in[-4,4]$ قرار دارد. ماکزیمم مساحت این مستطیل را بیابید.

**تمرین ۴۶.۱.** ماکزیمم تابع $y = ax^۲ + ax + ۵x$ برابر ۴ است. مقادیر $a$ را بیابید.

**تمرین ۴۷.۱.** نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲mx + (m-۱)^۲$ بالای محور طول‌هاست. حدود $m$ را بیابید.

**تمرین ۴۸.۱.** اگر نمودار $y = (m-۱)x^۲ + ۴x - ۴$ فقط در نواحی سوم و چهارم باشد، حدود تغییرات $m$ را بدست آورید.

**تمرین ۴۹.۱.** مربع $ABCD$ به ضلع $a$ مفروض است. روی اضلاع آن و در یک جهت، قطعات $AA' = BB' = CC' = DD' = x$ را جدا می‌کنیم. $x$ کدام باشد تا مساحت مربع $A'B'C'D'$ ماکزیمم شود؟

**تمرین ۵۰.۱.** نقطه‌ی ماکزیمم تابع $y = mx^۲ - x - ۱$ در ناحیه‌ی دوم یا چهارم قرار می‌گیرد. حدود تغییرات $m$ را بیابید.

## ۴.۱ حل معادلات شامل عبارات گویا و گنگ

### ۱.۴.۱ معادلات شامل عبارات گویا

**مستطیل طلایی**، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب $x, y$ باشند، باید داشته باشیم: $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ . نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** گوییم.

تصور کنید کع عرض مستطیل را برابر $y = ۱$ بگیریم. دراینصورت داریم $\frac{x}{۱} = \frac{x+۱}{x}$ . این یک معادله است که شامل عبارات گویا است. بیایید تا با هم مقدار $x$ را محاسبه کنیم. با فرض اینکه $x \neq ۰$ می‌توان طرفین-وسطین کرد. پس داریم:

$$x^۲ = x + ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \longleftarrow \text{قابل قبول} \\ x_۲ = \dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \longleftarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

عدد $x = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \approx ۱/۶۱۸$ را عدد طلایی گویند.از دوران باستان تصور بر این بوده است مه مستطیل‌هایی که نسبت طول به عرض آنها عدد طلایی باشد به چشم انسان خوشایندتر هستند. گذشته از پیدا شدن این عدد در بسیاری از امور طبیعت، مثل آفتابگردان، کندوی زنبور عسل و عیره، انسان‌ها نیز از این عدد استفاده‌های زیادی می برند. کپلر اعتقاد داشت که هندسه دو گنج بزرگ دارد. یکی قضیه‌ی فیثاغورس و دیگر عدد طلایی. حتی برای میزان تناسب اندام یک شخص ، کافیست طول کف پا تا ناف شخص را به طول ناف تا روی سر شخص تقسیم کرد و هرچه عدد بدست آمده به عدد طلایی نزدیکتر باشد، آن شخص خوشتیپ‌تر است.

معادله‌ای که در بالا به آن برخورد کردیم یک نمونه از معادله‌ی گویا بود.

**تذکر مهم:** برای حل یک معادله گویا میتوان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرجها،در کوچکترین مضرب مشترک (ک م م) مخرجها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جوابهای بهدست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

**مسئله:** در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر با هم کار می کنند. اگر هر دو با هم کار کنند کار نشاکاری در ۱۸ روز تمام می‌شود. چنانچه هر کدام به تنهایی کار کنند کارگر اول کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دومی تمام می کند. معین کنید هر کدام از این دو کارگر کار را به تنهایی در چند روز تمام می کنند؟

حل: کاری که هر دو کارگر در یک روز انجام می دهند $\frac{۱}{۱۸}$ است. سهم کارگر اولی $\frac{۱}{x}$ است و سهم کارگر دومی $\frac{۱}{x+۱۵}$ است. حال جمع کار این دو کارگر در یک روز انجام داده‌اند همان $\frac{۱}{۱۸}$ است. به زبان ریاضی داریم:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

با ضرب طرفین این رابطه در $۱۸x(x+۱۵)$ داریم:

$$۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x^۲+۱۵x \Rightarrow x=۳۰$$

یعنی کارگر اولی در ۳۰ روز و دومی در ۴۵ روز به تنهایی کار را انجام می‌دهند.

**مثال ۱.۱۸.** خط یک متروی تهران به طول۶۰کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل میکند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت $v$کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی میکند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه‌طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

حل: طبق دستور حرکت با سرعت ثابت در فیزیک داریم $x=v.t$ پس زمان رفت برابر $\frac{۶۰}{v}$ است. همچنین زمان برگشت $\frac{۶۰}{v-۱۰}$ است. طول مسیر هم ثابت است. پس با این حساب باید داشته باشیم:

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{v}+\frac{۱}{۲} \Rightarrow v^۲-۱۰v-۶۰۰=۰ \Rightarrow v=۳۰$$

پس زمان رفت دو ساعت و برگشت دو و نیم ساعت است.

این مسائل نمونه‌هایی است تا کاربرد حل معادلات گویا را در زندگی روزمره و پیرامون ما نشان می‌دهد.

**مثال ۱.۱۹.** دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵هفته، آرمان جمعا ۳۶امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول بهصورت $\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$ بوده است. او از هفته ششم به بعد در تمام آزمونها امتیاز ۹را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. میخواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است.

حل: فرض کنید که آرمان از هفته‌ی ششم به بعد در $n$ آزمون شرکت کرده باشد. مجموع امتیازات وی $9n$ خواهد بود و میانگین کل آزمون‌های وی برابر است با $\frac{9n+36}{n+5}$ که این عدد طبق فرض باید برابر ۸ باشد. با این حساب باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\frac{9n+36}{n+5} = 8 \Rightarrow 9n+36 = 8n+40 \Rightarrow n = 4$$

**مثال ۱.۲۰.** معادلات شامل عبارات گویای زیر را حل کنید.

$$1)\ \frac{x-1}{x-2} + \frac{1+x}{x} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$$

$$2)\ \frac{1}{2x^2-x+1} + \frac{3}{2x^2-x+3} = \frac{10}{2x^2-x+7}$$

حل: برای حل ۱ ابتدا سمت چپ را مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{1+x}{x} = \frac{x^2-x+x^2-x-2}{x(x-2)} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$$

$$\frac{2x^2-2x-2}{x(x-2)} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} \Rightarrow 2x^2-2x-2 = x^2-2x+2$$

از اینجا $x^2 = 4$ حاصل می شود که $x = 2$ قابل قبول نیست و تنها جواب $x = -2$ قابل قبول است.

برای حل ۲ تعویض متغیری بصورت $2x^2 - x + 1 = u$ در نظر می‌گیریم. پس معادله بصورت:

$$\frac{1}{u} + \frac{3}{u+2} = \frac{10}{u+6} \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u = 2, -1$$

حال با قرار دادن $u = 2x^2 - x + 1 = 2, -1$ دو معادله‌ی درجه دوم حاصل می شود که یکی فاقد جواب است و دیگری یعنی $2x^2 - x - 1 = 0$ دارای دو جواب $-2, \frac{5}{2}$ است که البته هردو قابل قبول هستند، چراکه هر سه مخرج معادله ناصفرند.

حال به سراغ معادلات شامل عبارات گنگ می‌رویم.

بازهم مانند کتاب درسی بحث را با طرح یک مسئله آغاز می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم روی خط $y = 2x + 1$ نقطه‌ای بیابیم که از دو نقطه‌ی $A(3,0)$ , $B(-1,0)$ به یک فاصله باشد. با انتخاب نقطه دلخواه $M(a, 2a+1)$ روی خط و نوشتن معادله‌ی $|MA| = |MB|$ به یک معادله شامل رادیکال‌ها می‌رسیم.

$$|MA| = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a+1)^2} = |MB|$$

از حل این معادله داریم : $a = 2$. به چنین معادلاتی که شامل عبارات رادیکالی هستند ، معادلات گنگ گوییم. اغلب با چند بار به توان دو رساندن به یک معادله می‌رسیم که دیگر شامل رادیکال نیست و به روش های قبلی حل می‌شود.

توجه داریم که جوابهای بدست امده را باید در خود معادله جایگذاری کنیم تا معلوم شود جواب اصلی است و نه جواب اضافی. بد نیست تذکر کتاب درسی را نیز بیان کنیم.

**تذکر مهم:** برای حل یک معادله رادیکالی میتوان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جوابهای حاصل در معادله اولیه صدق میکنند.

**مثال ۲۱.۱.** نقطه‌ای روی محور طول‌ها بیابید که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $P(۲,۳)$ برابر ۵ باشد.

حل: نقطه‌ی روی محور طول‌ها را بصورت $A(a,۰)$ درنظر می‌گیریم. با دستور فاصله نقاط خواهیم داشت:

$$|AP| = \sqrt{(a-۲)^۲ + ۳^۲} = ۵$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a-۲)^۲ = ۱۶ \Rightarrow a - ۲ = \pm ۴ \Rightarrow a = ۶, -۲$$

یعنی دو نقطه‌ی $A(۶,۰), B(-۲,۰)$ جواب مسئله هستند.

**مثال ۲۲.۱.** معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x - \sqrt{x} = ۲۰$

۲) $\sqrt{x-۲} - \sqrt{۳x+۷} = ۳$

۳) $x - ۱ + \sqrt{x^۲ - ۱} = ۰$

۴) $۲x - x^۲ = \sqrt{۶x^۲ - ۱۲x + ۷}$

۵) $\sqrt{x^۲+x+۴} + \sqrt{x^۲+x+۱} = \sqrt{۲x^۲+۲x+۹}$

حل: برای حل ۱ داریم $\sqrt{x} = x - ۲۰$ و با توان دو رساندن داریم $x = x^۲ - ۴۰x + ۴۰۰$ و از ساده کردن این معادله داریم $x^۲ - ۴۱x - ۴۰۰ = ۰$ و از حل این معادله $x = ۲۵, ۱۶$ حاصل می‌شود جواب ۱۶ در معادله صادق نیست و تنها ۲۵ جواب معادله است.

برای حل ۲ داریم $\sqrt{x-۲} = \sqrt{۳x+۷} + ۳$ و از توان دو رساندن این معادله داریم:

$$x - ۲ = ۳x + ۷ + ۹ + ۶\sqrt{۳x+۷} \Rightarrow -۲x - ۱۸ = ۶\sqrt{۳x+۷}$$

طرفین را بر دو ساده کرده و مجددا به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۲ + ۱۸x + ۸۱ = ۲۷x + ۶۳ \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow x = ۳, ۶$$

متاسفانه این دو جواب هیچ‌یک در معادله صادق نیستند و معادله جواب ندارد.(توجه: در حین حل معادله به مرحله‌ای رسیدیم که از همان‌جا می‌شد حدس زد که این معادله فاقد جواب است. اگر گفتید کدام مرحله؟)

برای حل ۳ داریم $\sqrt{x^۲-۱}=۱-x$ و از طرفی باید $x^۲-۱\geq ۰$ باشد و هم $۱-x\geq ۰$ که از اشتراک آنها فقط $x=۱$ حاصل می‌شود که تنها جواب است.

برای حل ۴ چنانچه روش معمول را بکارگیریم به یک معادله‌ی درجه چهار می‌رسیم که مجموع ضرائبش صفر است و لذا $x=۱$ یکی از جواب‌هایش است. اما یافتن سایر جوابها دشوار است. یک ترفند ساده و جالب آنست که دقت کنید سمت چپ معادله یک سهمی است که ماکزیممی برابر یک دارد که در $x=۱$ رخ می‌دهد و عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که آن هم مینیممی برابر یک دارد که از قضا در $x=۱$ رخ می دهد. پس همین $x=۱$ تنها جواب معادله است.چرا؟

برای حل ۵ با تعویض متغیر $u=x^۲+x$ داریم $\sqrt{۲u+۹}=\sqrt{u+۱}+\sqrt{u+۴}$ که با به توان دو رساندن طرفین این معادله داریم:

$$\sqrt{u^۲+۵u+۴}=۲\Rightarrow u^۲+۵u=۰\Rightarrow u=۰,-۵$$

حال قرار می‌دهیم $x^۲+x=-۵$ , $x^۲+x=۰$ که از این دو معادله تنها $x^۲+x=۰$ دارای دو جواب $x=۰,-۱$ است و هر دو جواب قابل قبول است.

**پرسش ۴۰.۱.** حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدامست؟(ریاضی ۹۴)

۱) $-۲$          ۲) ۱          ۳) ۲          ۴) ۴

حل: برای سادگی تعویض متغیری بصورت $u=x^۲+۴x+۳$ انجام داده تا معادله بصورت $u=\sqrt{u+۲}$ حاصل شود. از اینجا $u^۲-u-۲=۰$ خواهد شد که دارای جوابهای $u=۲,-۱$ است و معادله‌ی اصلی بصورت $x^۲+۴x+۱=۰$ است که حاصلضرب ریشه‌هایش ۱ می باشد و همچنین معادله‌ی $x^۲+۴x+۴=۰$ که دارای جواب غیرقابل قبول $x=-۲$ است.(در معادله صادق نیست) پس گزینه‌ی ۲ جواب درست است.

**پرسش ۴۱.۱.** ۱۱ کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟( سراسری ۹۲)

۱) ۰/۴          ۲) ۰/۵          ۳) ۰/۶          ۴) ۰/۸

حل: ابتدا جرم کل رنگ را محاسبه می کنیم: $m=۱۱\times\frac{۴۰}{۱۰۰}+۴\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=۷/۲kg$ حال فرض کنید که $x$ کیلوگرم تبخیر شود تا غلظت به ۵۰ درصد برسد، پس $\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۷/۲}{۱۵-x}$ که از حل این معادله‌ی گویا داریم $x=۰/۶$ .

**تمرین ۵۱.۱.** معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{2x^2+1}{2x+1}+\frac{2x+1}{2x^2+1}=-2$ پاسخ: جواب ندارد

۲) $\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}$ جواب: $x=1, x=-\frac{1}{2}$

۳) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1+\sqrt{2x+1}}=5$ جواب: $x=4$

۴) $x+\sqrt{2x+3}=5$ جواب: $x=6-\sqrt{14}$

۵) $\sqrt{x-3}+\sqrt{8-2x}=x-5$ از طریق یافتن دامنه معادله را حل کنید.جواب ندارد

۶) $\frac{x-1}{2}+\frac{3}{x-1}=\frac{5}{2}$ جواب: $x=3, x=4$

۷) $\frac{x-3}{x^2-x-6}+\frac{3x+1}{x-2}=\frac{20x-9}{x+2}$ جواب: $x=\frac{6}{7}$

## ۵.۱ خودآزمایی

**تست ۱.۱.** به ازای چند مقدار صحیح $x$ مجموع دو کسر $\frac{x-1}{x-2}, \frac{1+x}{z}$ برابر کسر $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بی شمار

جواب: $x=2$

**تست ۲.۱.** اگر $b, a$ ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-7x+3=0$ باشند، حاصل عبارت $3a^3+7b$ کدامست؟

۱) $\frac{31}{3}$ ۲) $\frac{40}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) $\frac{58}{3}$

جواب: گزینه ۲ درست است.

**تست ۳.۱.** فاصله‌ی محل تلاقی خطوط $y=2x$ , $3y=4x+2$ از مبدا کدامست؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

جواب: گزینه دو درست است

**تست ۴.۱.** نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۴x + a + ۱$ ماکزیممی به عرض ۲− دارد. $f(-۱)$ کدامست؟

۱) ۱ − ‌ ۲) ۵ − ‌ ۳) ۱۱ − ‌ ۴) ۸ −

جواب: ۱۱− .

**تست ۵.۱.** فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ روی نیمساز ناحیه‌ی اول از نقطه‌ی $B(۲,۱)$ از ۳ برابر طول نقطه‌ی $A$ یک واحد کمتر است. محموع طول و عرض نقطه‌ی $A$ کدامست؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ ‌ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$ ‌ ۳) $\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ‌ ۴) $\frac{۴\sqrt{۷}}{۷}$

جواب: ۴ درست است

**تست ۶.۱.** اگر $b, a$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$ باشند، حاصل $a\sqrt{-b} + b\sqrt{-a}$ کدامست؟

۱) $-۲ < a < ۲$ ‌ ۲) $۲ < a < ۵$ ‌ ۳) $۲ < a < ۱۴$ ‌ ۴) $۵ < a < ۱۴$

جواب: ۲ درست است

**تست ۷.۱.** اگر معادله‌ی $x + ۴\sqrt{x} + m = ۰$ حداقل یک جواب داشته باشد، آنگاه مجموعه جواب همه‌ی مقادیر $m$ کدامست؟

۱) $m \leq ۰$ ‌ ۲) $m \leq ۳$ ‌ ۳) $۳ \leq m \leq ۷$ ‌ ۴) $m \leq ۷$

جواب: ۲ درست است.

**تست ۸.۱.** اگر $b, a$ جوابهای معادله‌ی $x^۶ - ۳x^۳ - ۴ = ۰$ باشند، حاصل $a^۳ + b^۳ + ab$ کدامست؟

۱) ۴ ‌ ۲) ۲ ‌ ۳) ۳ ‌ ۴) ۵

جواب: ۱ درست است

**تست ۹.۱.** به ازای چه مقادیری از $m$ سهمی به معادله‌ی $y = (m-۲)x^۲ + ۲x + ۱ - m$ فقط از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $m > ۱$ ‌ ۲) $m < ۲$ ‌ ۳) $m > ۲$ ‌ ۴) $۱ \leq m \leq ۲$

جواب: ۴ درست است

**تست ۱۰.۱.** دو ضلع مستطیلی روی خطوط $x + y = ۳, x - y + ۱ = ۰$ واقعند. اگر نقطه‌ی $(۲, -۲)$ یکی از رئوس مستطیل باشد، مساحت آن کدامست؟

۱) ۲ ‌ ۲) ۸ ‌ ۳) ۷٫۵ ‌ ۴) ۴٫۵

جواب: ۳ درست است.

**تست ۱۱.۱.** اگر معادله‌ی $x^4 - (m+1)x^2 + \frac{m+1}{2} = 0$ دارای ۴ جواب حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر $m$ به کدام صورت است؟

۱) $m < -1$    ۲) $m > 1$    ۳) $-1 < m < 1$    ۴) $m < 1$

جواب: ۲ درست است

**تست ۱۲.۱.** نقطه‌ی $A(a+15, 5)$ در ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات است و فاصله‌اش تا مبدا مختصات برابر $\sqrt{106}$ است. مقدار $a$ برابر است با:

۱) $-10$    ۲) $-8$    ۳) $-7$    ۴) $-9$

حل: گزینه یک دست است

**تست ۱۳.۱.** اگر مجموع مربعات ریشه های $-3x^2 + (a-1)x + (a+2) = 0$ برابر ۱۰ باشد، مقدار مثبت $a$ کدامست؟

۱) ۷    ۲) ۸    ۳) ۹    ۴) ۱۰

جواب: گزینه ۱ درست است.

**تست ۱۴.۱.** نمودار $y = x^2 - 2x + 6$ همواره بالای خط $y = mx + 2$ قرار دارد. محدوده‌ی $m$ کدامست؟

۱) $-2 < m < 6$    ۲) $-6 < m < 2$    ۳) $-6 < m < 3$    ۴) $-3 < m < 6$

جواب: گزینه ۲ درست است.

**تست ۱۵.۱.** مجموع ضرائب معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس مربع ریشه های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد، کدامست؟

۱) ۱۶    ۲) $-12$    ۳) $-2$    ۴) ۸

جواب: گزینه دو درست است

**تست ۱۶.۱.** به ازای چه مقدار $m$ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + (m+1) = 0$ برابر هستند؟

۱) $-1$    ۲) $-2$    ۳) ۲    ۴) ۱

جواب: گزینه ۲ درست است

**تست ۱۷.۱.** نقاط $(-2, 1), (4, 1), (1, 5)$ سه راس مثلثی‌اند. نوع مثلث کدامست؟

۱) متساوی‌الساقین    ۲) متساوی‌الاضلاع    ۳) قائم‌الزاویه    ۴) غیر مشخص

جواب: گزینه ۱ درست است.

**تست ۱.۱۸.** فاصله‌ی محل برخورد دو خط $۲x + y = ۱$ و $۲y - ۳x = ۰$ از مبدا مختصات کدامست؟

۱) ۲  ۲) ۳  ۳) $\sqrt{۱۰}$  ۴) $۲\sqrt{۵}$

جواب: گزینه ۳ درست است.

**تست ۱.۱۹.** اگر نقطه‌ی $A$ به طول ۲ روی خط $y = ۳x - ۱$ و نقطه‌ی $B$ نقطه‌ی برخورد خط $y = -۲$ با محور عرض‌ها باشد، طول پاره خط $AB$ کدامست؟

۱) $\sqrt{۱۳}$  ۲) $\sqrt{۲۶}$  ۳) $\sqrt{۵۳}$  ۴) $\sqrt{۶۳}$

حل: گزینه ۳ پاسخ درست است.

**تست ۱.۲۰.** اگر تمام ضرایب یک معادله‌ی درجه دوم اعداد گویایی باشند و یکی از ریشه‌ها $\sqrt{۲} - ۱$ باشد، مجموع مکعب دو جواب این معادله کدامست؟

۱) ۲  ۲) $-۲$  ۳) ۱۴  ۴) $-۱۴$

جواب: گزینه ۳ درست است.